ALGEBRAICKÉ VLASTNOSTI MATIC

A, B matice stejného typu $m\times n$.

$C = A+B$ je typu $m\times n$.

$$C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

C je SOUČET MATIC A, B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

A matice, $c \in \mathbb{R}$

$B = c\cdot A$ je matice stejného typu jako A

$$B_{i,j} = c\cdot A_{i,j}$$

$c = -1$

$-1\cdot A = -A$ ... OPAČNÁ MATICE

Tvrzení A, B, C matice nad polem P, $c, k \in P$.
Pak platí:

1) $A+B = B+A$ (komutativita)
2) $A+(B+C) = (A+B)+C$ (asociativita)
3) $A+0 = A$ (0 je neutrální prvek $+$)
4) $A+(-A) = 0$
5) $1A = A$
6) $c(A+B) = cA + cB$
7) $(c+k)A = cA + kA$
8) $c(kA) = (ck)A$.

Důkaz. 6) $M = c(A+B)$, $N = cA + cB$

$$M_{i,j} = c(A_{i,j} + B_{i,j}) = cA_{i,j} + cB_{i,j}$$

$$N_{i,j} = cA_{i,j} + cB_{i,j} \quad \checkmark$$

A matice typu $r \times s$
B matice typu $s \times t$

$C = A \cdot B$ je matice typu $r \times t$

$$C_{k,l} = A_{k,1} \cdot B_{1,l} + A_{k,2} \cdot B_{2,l} + \dots + A_{k,s} \cdot B_{s,l} = \sum_{i=1}^{s} A_{k,i} \cdot B_{i,l}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} B \\ \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}} & \begin{pmatrix} \underset{4}{1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2} & \underset{4}{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot(-1)} \\ \underset{6}{3\cdot 0 + 4\cdot 1 + 1\cdot 2} & \underset{10}{3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 1\cdot(-1)} \end{pmatrix} \end{array}$$

Matice A se nazývá ČTVERCOVÁ, když je typu $n \times n$.

Čtvercová matice A, která má na diagonále 1 a jinde 0, se nazývá JEDNOTKOVÁ a značí se E.

$$E_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{když } i = j, \\ 0, & \text{když } i \neq j. \end{cases}$$

Tvrzení A, B, C matice

1) $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$

2) $A\cdot E = E\cdot A = A$

3) $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

4) $\underbrace{(A+B)\cdot C}_{M} = \underbrace{AC+BC}_{N}$

Důkaz 4)

$$M_{k,l} = \sum_{i=1}^{s} (A+B)_{k,i}\cdot C_{i,l}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} (A_{k,i}+B_{k,i})\cdot C_{i,l}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \left(A_{k,i}\cdot C_{i,l} + B_{k,i}\cdot C_{i,l}\right)$$

$$N_{k,l} = (A\cdot C)_{k,l} + (BC)_{k,l} =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} A_{k,i} C_{i,l} + \sum_{i=1}^{s} B_{k,i}\cdot C_{i,l} =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \left(A_{k,i} C_{i,l} + B_{k,i}\cdot C_{i,l}\right)$$

INVERZNÍ MATICE

Čtvercové matice A, B stejného typu.

$$A \cdot B = B \cdot A = E$$

pak A je INVERTIBILNÍ a
B je matice INVERZNÍ k A a
značí se A^{-1}.

Tvrzení Ke každé čtvercové matici A existuje nejvýše jedna matice inverzní.

Důkaz Předpokládejme, že B_1, B_2 jsou inverzní k A.

Tedy, $A \cdot B_1 = B_1 \cdot A = E = B_2 \cdot A = A \cdot B_2$

$$B_1 = B_1 \cdot E = B_1 \cdot A \cdot B_2 = E \cdot B_2 = B_2$$

Tvrzení A, B invertibilní matice takové, že $A \cdot B = E$. Pak $A = B^{-1}$ a $B = A^{-1}$.

Důkaz. $B = E \cdot B = A^{-1} \cdot A \cdot B =$

$= A^{-1} \cdot E = A^{-1}$

$A = \ldots = B^{-1}$

Tvrzení A, B invertibilní matice.

1) $A \cdot B$ je taky invertibilní a

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

2) A^{-1} je invertibilní a $(A^{-1})^{-1} = A$.

Důkaz 1) $\underbrace{A \cdot B}_{} \cdot \underbrace{B^{-1} \cdot A^{-1}}_{} = A \cdot E \cdot A^{-1} =$

$= A \cdot A^{-1} = E$

2) … ✓

ELEMENTÁRNÍ MATICE

$$E_{i,j}(c) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 \\ & & 1 & & c & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\qquad & i & \qquad & j & \qquad \end{matrix} & \end{array}$$

$$E_{i}(c) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & c & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\qquad & i & \qquad\qquad \end{matrix} & \end{array}$$

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Lemma A, A' ~~stejného~~ téhož typu. Následující výroky jsou ekvivalentní.

1) A' vznikne z A jednou z elementárních úprav.

2) existuje elementární matice Q tak, že

$$A' = QA.$$

Důkaz DÚ.

Tvrzení Čtvercová matice A je invertibilní právě tehdy, když je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.

Důkaz. DÚ

$$(A \mid E), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}}_{B}\right)$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B \cdot A \overset{?}{=} E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ není invertibilní.

TRANSPONOVANÁ MATICE

A matice typu $m \times n$.

B matice typu $n \times m$ takové, že

$B_{i,j} = A_{j,i}$ se nazývá

TRANSPONOVANÁ k A a značí se A^T.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Tvrzení 1) Transponovaná matice k elementární matici je opět element. matice.

2) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

3) Když A je invertibilní, pak A^T je invertibilní a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Další DÚ.